Etude d'une fonction définie par une intégrale

Partie I

L'objectif de cette partie est le calcul des intégrales $I = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ et $J = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

1.a Justifier que les intégrales I et J sont bien définies

1.b A l'aide d'un changement de variable adéquat trouver une relation engageant I et J.

2. On définit une application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2$.

2.a Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer $f'(x)$.

2.b Dresser le tableau de variation de f.

3. On définit une application $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $g : x \mapsto \int_0^1 \frac{e^{-x(1+t^2)}}{1+t^2} dt$.

3.a Calculer $g(0)$.

3.b Déterminer, si elle existe, la limite de g en $+\infty$.

Nous admettrons que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et que $g'(x) = -\int_0^1 e^{-x(1+t^2)} dt$.

3.c Dresser le tableau de variation de g

4. On définit une application $h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $h : x \mapsto f(x) + g(x^2)$.

4.a Montrer que h est une fonction constante.

4.b En déduire les valeurs de I et J.

Partie II

On définit deux applications u et v de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et une application z de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ par :

$$u : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\cos(tx)}{\sqrt{t}} dt, \quad v : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}\sin(tx)}{\sqrt{t}} dt, \quad z : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{(-1+ix)t}}{\sqrt{t}} dt.$$

1.a Montrer que les intégrales ci-dessus sont bien définies et observer la relation $z = u + iv$.

1.b Etudier la parité des applications u et v.

1.c Reconnaître $z(0)$.

2.a En appliquant l'inégalité de Taylor-Lagrange à $\lambda \mapsto e^{i\lambda}$, établir que : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \left|e^{i\lambda} - 1 - i\lambda\right| \leq \frac{\lambda^2}{2}$

2.b Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(-1+ix)t} dt$ est bien définie.

2.c Justifier la relation :

$$\forall (x,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*, \left|\frac{z(x+h) - z(x)}{h} - i\int_0^{+\infty} \sqrt{t} e^{(-1+i.x)t} dt\right| \leq \frac{|h|}{2} \int_0^{+\infty} t^{3/2} e^{-t} dt.$$

En déduire que les applications z, u et v sont dérivables.

3. Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, z'(x) = \frac{-1}{2(x+i)} z(x)$ (on pourra utiliser une intégration par parties)

En déduire que les applications z, u et v sont indéfiniment dérivables.

Partie III

1. En introduisant la partie réelle et la partie imaginaire de $\dfrac{-1}{x+i}$, trouver les primitives de l'application a de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $a{:}\, x \mapsto \dfrac{-1}{2(x+i)}$.

2. Déterminer toutes les applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ solutions de l'équation différentielle :
$y' = \dfrac{-1}{2(x+i)}\, y$.
En déduire une expression de $z(x)$ puis de $u(x)$ et $v(x)$.